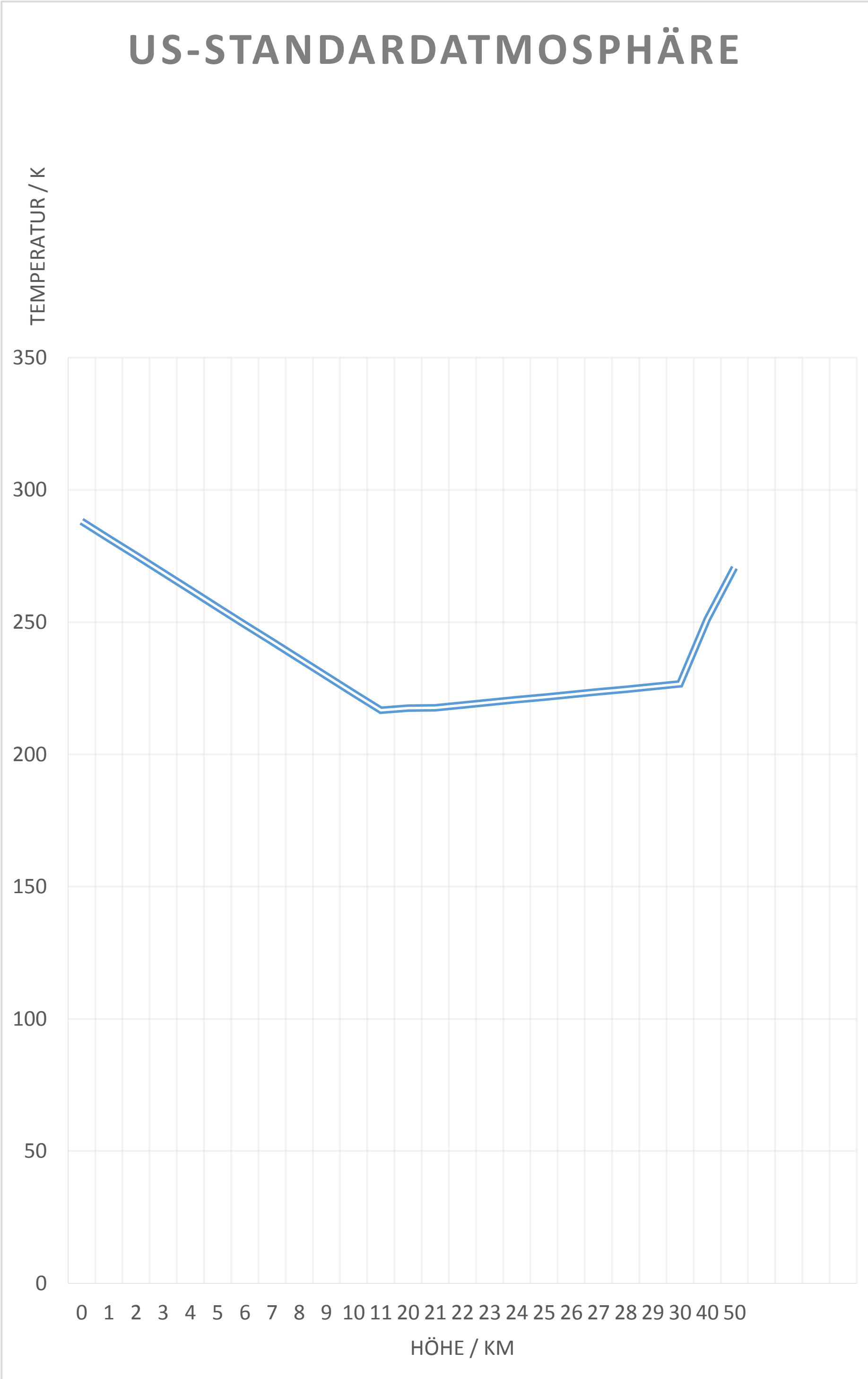
Club Apollo 13, 14. Wettbewerb Aufgabe 3

Warum haben Wetterballons eine dehnbare Hülle?

a) Grundlagen: Die Statik der Atmosphäre

1)

Temperatur in Kelvin	Höhe in Kilometern
288,15	0
281,650	1
275,150	2
268,650	3
262,150	4
265,650	5
249,150	6
242,650	7
236,150	8
229,650	9
223,150	10
216,650	11-20
217,650	21
218,650	22
219,650	23
220,650	24
221,650	25
222,650	26
223,650	27
224,650	28
225,650	29
226,650	30
251,050	40
270,650	50
245,450	60
217,450	70
196,650	80
186,946	86



Im Diagramm ist der mittlere vertikale Verlauf der Lufttemperatur dargestellt. Dieser reicht von dem Boden (h = 0km) bis h = 50 km.

Es wird immer im Schritt von einem Kilometer vorgegangen, der Bereich zwischen 11 und 20 km verändert sich nicht und wird deswegen zusammengefasst. Weiterhin wird ab 30km in 10 km-Schritte gegangen.

2)

Im nächsten Schritt werden die Temperaturgradienten in Kelvin mithilfe der Formel

$$\gamma = \frac{T_L(z_o) - T_L(z_u)}{z_0 - z_u}$$

bestimmt. $T_L(z_o)$ bezeichnet dabei die obere Lufttemperatur, $T_L(z_u)$ die untere Lufttemperatur. Die Temperaturgradienten werden dabei im Abstand von jeweils 1 km bestimmt. Die Temperaturwerte können der Tabelle aus Aufgabe a;1 entnommen werden.

$$\gamma\ (0 - 1\ km) = \frac{281{,}65\ K - 288{,}15\ K}{1\ km - 0\ km} = -6{,}5\ K$$

Wie zu sehen ist, beträgt der Temperaturgradient zwischen 0 und 1 km -6,5 Kelvin. Entsprechend dieses Verfahrens werden sämtliche Temperaturgradienten bis 50 km bestimmt.

<u>**Temperaturgradienten:**</u>

y / Kelvin pro km	**Höhe / km**
- 6,5	0 - 1
- 6,5	1 - 2
- 6,5	2 - 3
- 6,5	3 - 4
- 6,5	4 - 5
- 6,5	5 - 6
- 6,5	6 - 7
- 6,5	7 - 8
- 6,5	8 – 9
- 6,5	9 - 10
- 6,5	10 - 11
+ 0,1	19 - 20
+ 1	20 - 21
+ 1	29 - 30
+ 24,4	30 - 40
+ 19,6	40 - 50

Mit diesem Verfahren konnten sämtliche Temperaturgradienten unter Zunahme der gefundenen Temperaturwerte bestimmt werden.

Für die Höhen 30 – 40 und 40 – 50 gilt dabei

24,4 Kelvin → 2,44 Kelvin pro km

19,6 Kelvin → 1,96 Kelvin pro km

3)

Mithilfe der Temperaturgradienten besteht nun die Möglichkeit, die Vertikalprofile des Luftdrucks sowie auch der Luftdichte zu bestimmen. Da der Luftdruck in Abhängigkeit von der Luftdichte steht, beginnen wir zunächst mit der Luftdichte.

Die Luftdichte p(z) lässt sich bei einem linearen Temperaturverlauf mit folgender Formel berechnen:

$$p(z) = p(z_u)\left(\frac{T_L(z)}{T_L(z_u)} \right)^{\frac{-g}{\gamma R_L}-1}$$

Dabei ist g die Gravitationsbeschleunigung und

$$\mathrm{T_L(z) = T_L(z_u) + \gamma\left(z - z_u\right)}$$

Allerdings wird die Definition von $T_L(z)$ als unnötig angesehen, da der damit berechnet Wert aus der Tabelle der Temperaturen in der Standardatmosphäre direkt entnommen werden kann. Dies führt zu einer Vereinfachung der Berechnung.

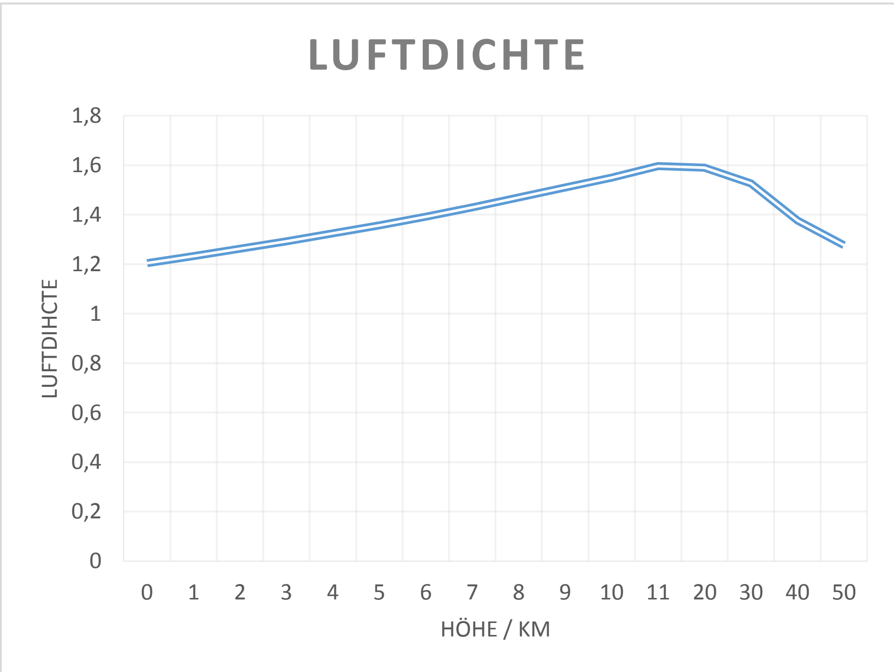
Als Luftdichte am Boden (h = 0 km) wurde p (0) = 1,2041 kg/m³ angenommen.

$$p\ (1\ km) = 1{,}2041\,\frac{kg}{m^3} * \left(\frac{281,65\ K}{288,15\ K}\right)^{\frac{-9{,}81\frac{m}{s^2}}{-6{,}5\ K*287\frac{J}{kgK}}-1} = 1{,}233\,\frac{kg}{m^3}$$

Wie zu sehen ist, eignet sich diese Formel, um die Luftdichte der verschiedenen Höhen berechnen zu können.

Luftdichte:

Luftdichte p (x) / $\frac{kg}{m^3}$	Höhe / km
1,2041	0
1,233	1
1,262	2
1,292	3
1,324	4
1,357	5
1,392	6
1,43	7
1,47	8
1,51	9
1,55	10
1,596	11
1,59	20
1,526	30
1,377	40
1,277	50



Damit konnten sämtliche Luftdichten bis zu 50 km bestimmt werden. Das Diagramm stellt den schematischen Verlauf der Entwicklung der Luftdichte da. Diese Werte scheinen der Realität zu entsprechen, Internetquellen geben für die Temperaturen ähnliche Werte an.[1] Fraglich ist nur, welchen Einfluss die Höhe auf die Luftdichte hat. Intuitiv würde gesagt werden, dass die Luft nach oben „dünner", also weniger dicht wird. Trotzdem wird zunächst mit diesen Werten weitergerechnet werden.

Im nächsten Schritt kann der Luftdruck bestimmt werden. Mit Verwendung der **idealen** Gasgleichung kann der Luftdruck P(z) mit

$$P\ (z) = p\ (z) * R_L * T_L(z)$$

bestimmt werden.

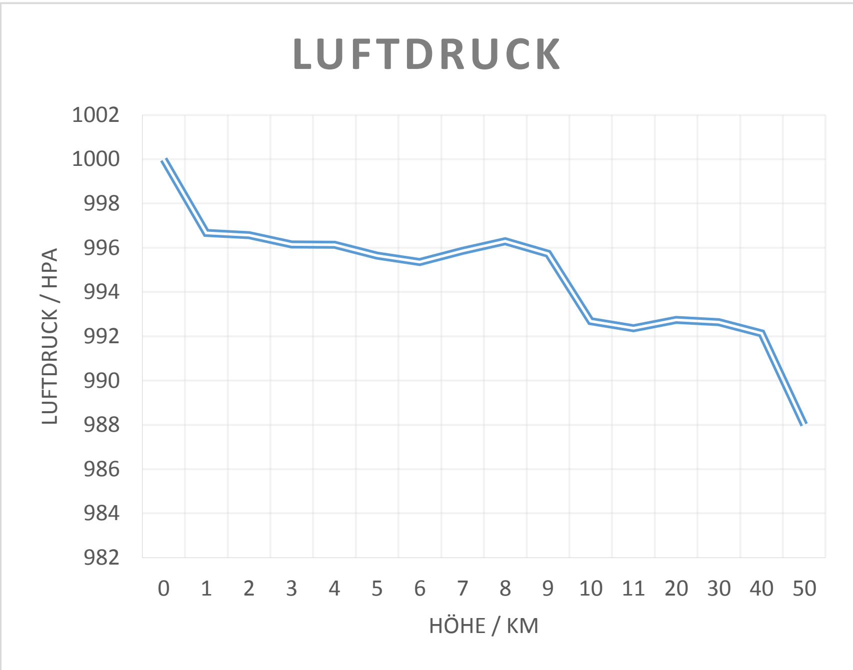
Für den Boden (h = 0 km) gilt P (0) = 1000 hPa. Die Luftdichte ist nun bekannt und R_L stellt eine ebenfalls bekannte Konstanze fest, sodass der Luftdruck nun einfach bestimmt werden kann.

$$P\ (1\ km) = 1{,}233\ \frac{kg}{m^3} * 287\ \frac{J}{kgK} * 281{,}65\ K = 996{,}67\ hPa$$

Wie zu sehen ist, scheint der Luftdruck mit diesem Verfahren berechenbar zu sein. Aus diesem Grund kann nun für sämtliche Höhenabschnitte der entsprechende Luftdruck bestimmt werden.

Luftdruck:

Luftdruck P (x) / hPa	Höhe / km
1000	0
996,67	1
996,57	2
996,15	3
996,13	4
995,65	5
995,36	6
995,86	7
996,29	8
995,73	9
992,68	10
992,36	11
992,74	20
992,64	30
992,14	40
988	50

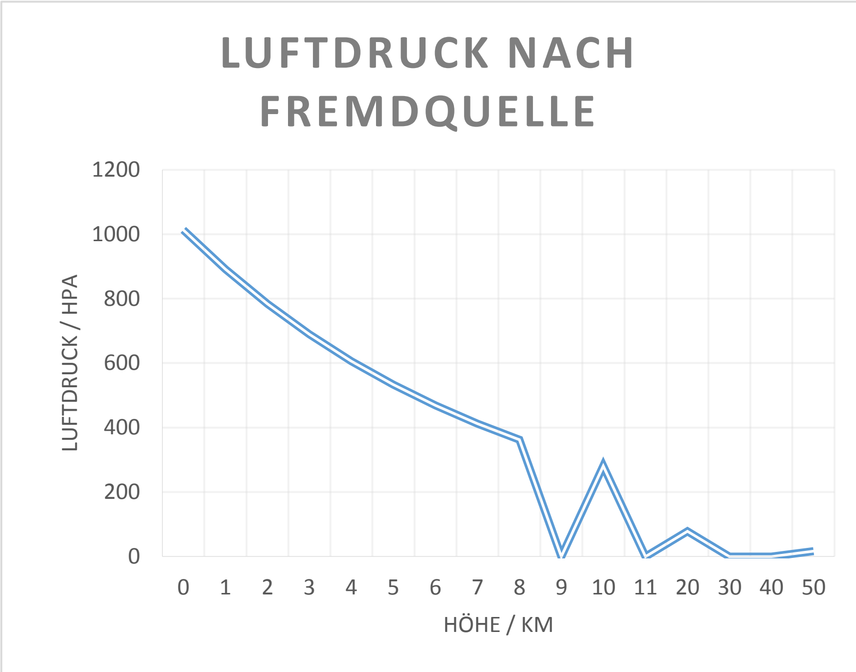


Trotz des anfänglichen Optimismus bezüglich dieser Methode muss das Ergebnis kritisch hinterfragt werden. Rein logisch erwartet man ein kontinuierliches Absinken des Luftdrucks, da mit steigender Lufthöhe weniger Luftmassen darüber vorhanden sind, sodass der Druck abnimmt. Dies kann in dem Diagramm festgestellt werden, allerdings erscheinen die Werte mehr als fragwürdig. Es ist stark zu bezweifeln, dass ein Höhenunterschied von 50km einen Luftdruckunterschied von lediglich 12 hPa zur Folge hat.

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Luftdichte

Fremdquellen aus dem Internet legen nahe, das bereits bei Höhen von über 5km der Druck halbiert wird. Diese kann hier nicht festgestellt werden. Wie der Quelle von Wikipedia entnommen werden konnte[2], sind diese Werte für den Luftdruck denkbar und erscheinen uns realistischer:

Luftdruck P (x) / hPa	Höhe / km
1013	0
891,2	1
783,8	2
689,4	3
606,3	4
533,3	5
469	6
412,5	7
362,8	8
-	9
280,7	10
-	11
77,8	20
-	30
-	40
16,5	50



Da die errechneten Werte sehr stark von den in der Fremdquellen angegebenen Werten abweichen, ist klar, dass innerhalb der Berechnungen ein Fehler vorgefallen sein muss. Dieser konnte allerdings immer noch nicht festgestellt werden. Es wird in Frage gestellt, ob der Luftdruck wirklich unter Verwendung der idealen Gasgleichung

$$P\ (z) = p\ (z) * R_L * T_L(z)$$

errechnet werden kann. Eventuell sind die Bedingungen doch nicht ideal genug, um sie hier anwenden zu können.

Weiterhin lässt das Diagramm *Luftdruck nach Fremdquelle* erahnen, dass sich der Luftdruck der x-Achse exponentiell annähert und nicht – wie die Gasgleichung darstellt - linear.

Für die weitere Bearbeitung der Aufgaben werden also in Bezug auf den Luftdruck die Werte der Fremdquelle verwendet.

b) Ballon mit nicht dehnbarer Hülle

1)

Der Ballon, der nun in die Luft gegeben wird und mit Helium befüllt ist, steigt erfahrungsgemäß zunächst auf. Seine Temperatur am Boden entspricht der Bodentemperatur

$$T_{He}(0) = T_L(0)$$

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Luftdruck

Das gleiche gilt für den Druck des Ballons. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass der Ballon beim Aufstieg keine Wärme mit der Umgebung austauscht.

Wenn der Ballon nun also aufsteigt, ist aus der Aufgabe a bekannt, dass der Luftdruck, die Dichte sowie die Temperatur zunächst abnehmen. Da der Ballon – wie in der Bedingung formuliert – **keine** Wärme mit der Umgebung austauscht, ändert sich die Temperatur im Ballon nicht. Dadurch ändern sich auch nicht der Druck und die Dichte. Eine Veränderung dieser Werte kann durch eine Verformung des Ballons stattfinden, die allerdings aufgrund der nicht dehnbaren Hülle ebenfalls nicht stattfinden kann.

Aus diesem Grund können sich weder der Druck, noch die Temperatur oder die Dichte des Ballons beim Aufstieg ändern.

Allerdings ist hier die Bedingung etwas unklar formuliert. Wenn der Ballon nicht aufsteigt, also beispielsweise eine Höhe von 2 km erreicht hat, dann ist nicht klar, ob trotzdem ein Wärmetausch stattfinden kann. Ist dies der Fall, dann ändern sich Druck, Temperatur und Dichte natürlich im Ballon, allerdings nur nicht beim Aufstieg selbst.

Auf einer Höhe von 2km ist die Temperatur eine andere, sodass der Ballon sich mit seiner inneren Temperatur an die äußere Temperatur anpasst und abkühlt. Durch eine Abkühlung ändern sich normalerweise Dichte und Druck des Ballons. Da der Ballon aber keine dehnbare Hülle hat, ist die Situation etwas anders. Nichtsdestotrotz nehmen Dichte und Druck bei einer Abkühlung im Ballon ab.

Beide Möglichkeiten sind hier möglich, die in der Aufgabenstellung formuliere Bedingung bezüglich des Wärmeaustausches ist hier unklar formuliert. Es wird davon ausgegangen, dass der Ballon nichtdestotrotz Wärme mit der Luft austauschen kann, wenn er steht.

2)

Die Auftriebskraft des Ballons lässt sich mithilfe der Formel

$$F_A = V * p_{He} * g$$

Bestimmen, die dem archimedischen Prinzip zugrunde liegt.[3] Dieses sagt aus, dass „die Auftriebskraft […] gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit bzw. der Gewichtskraft des verdrängten Gases“ ist.

Unter Verwendung der idealen Gasgleichung kann die Luftdichte des Heliums im Ballon bestimmt werden

$$p\ (z) = \frac{P\ (z)}{R_{He} * T_{He}(z)}$$

$T_{He}(0)$ = 288,15 K

P (0) = 1000 hPa

R_{He} = 2078 $\frac{J}{kgK}$

Einsetzen dieser Werte liefert

[3] http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/auftrieb-und-luftdruck#

$$p_{He} = \frac{1000\ hPa}{2078\ \frac{J}{kgK} * 288{,}15\ K} = 0{,}167\ \frac{kg}{m^3}$$

Das Volumen des Ballons kann über den Radis des Ballons und der Gleichung für das Kugelvolumen bestimmt werden.

$$V_{He} = \frac{4}{3} * \pi * r^3 = \frac{4}{3} * \pi * (0{,}75\ m)^3 = 1{,}767\ m^3$$

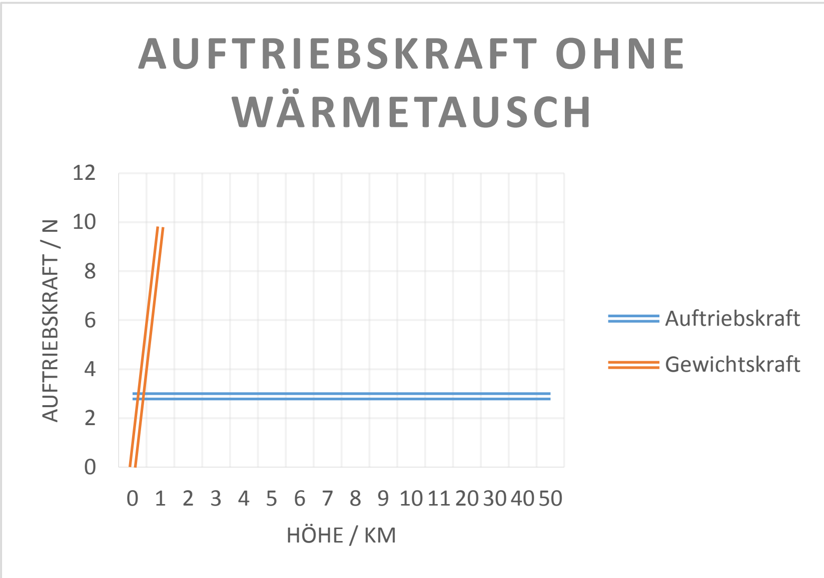
Mit g = 9,81 m/s² kann nun also die Auftriebskraft F_A bestimmt werden.

$$F_A = 1{,}767\ m^3 * 0{,}167\ \frac{kg}{m^3} * 9{,}81\ \frac{m}{s^2} = 2{,}895\ N$$

Die Auftriebskraft des Ballons beträgt also am Boden 2,895 Newton. Wenn der Wärmetausch stattfindet, dann ändert sich diese Auftriebskraft, da die Dichte im Ballon sich verändert. Ist dies nicht der Fall, so würde der Ballon bis ins Weltall mit der konstanten Auftriebskraft 2,895 N aufsteigen. Aufgrund der unklaren Bedingungen kann diese Frage an dieser Stelle nicht endgültig beantwortet werden.

Auftriebskraft (ohne Wärmetausch):

Auftriebskraft/ N	Höhe / km
2,895	0
2,895	1
2,895	2
2,895	3
2,895	4
2,895	5
2,895	6
2,895	7
2,895	8
2,895	9
2,895	10
2,895	11
2,895	20
2,895	30
2,895	40
2,895	50



Man kann sehen, dass die Auftriebskraft bei konstanter Temperatur im Ballon gleicht bleibt und keine Beeinflussung durch die äußeren Begebenheiten stattfindet.

Die Frage ist nun, wie hoch der Ballon mit einer Gesamtmasse von 1kg fliegen würde. Die Gewichtskraft der Masse wirkt der Auftriebskraft genau entgegen. Der Ballon würde in der Luft dann zum Stillstand kommen, wenn sich die beiden Kräfte ausgleichen. Die Auftriebskraft ist konstant, während die Gewichtskraft linear mit der Höhe zunimmt. Es gilt:

$$F_G = m * g * h$$

Am Boden würde eine Gewichtskraft

$$F_G(\,h = \ 0\,) = 1\,kg * 9{,}81\,\frac{m}{s^2} * 0\,m = 0\,N$$

wirken. Bei einer Höhe von 1 Meter wirkt schon die Kraft

$$F_G\ = 9{,}81\,N$$

Die Gewichtskraft ist also schon höher als die Auftriebskraft und der Ballon könnte gar nicht so hoch steigen. Wie dem Diagramm entnommen werden kann, schneiden sich die beiden Geraden bei ca. 0,3 Meter, sodass der Ballon in dieser Höhe im Gleichgewicht wäre.

3)

Die Höhe, in der Gewichts- und Auftriebskraft im Gleichgewicht sind, kann ebenfalls durch eine Gleichung bestimmt werden.

Die Auftriebskraft F_A = 2,895N ist bekannt. Dieser Wert kann nun gleich der Gleichung für die Gewichtskraft gestellt werden.

$$2{,}895\,N = m * g * h$$

Da die Höhe gefragt ist, wird die Gleichung nach h umgeformt

$$h = \frac{2{,}895\,N}{m * g}$$

Einsetzen der Masse und der Gravitationsbeschleunigung ergeben

$$h = 0{,}295\,m$$

Wie zu sehen ist, liegt dieser Wert sehr nah an der optischen Abschätzung aus dem Diagramm.

c) Ballon mit dehnbarer Hülle

1)

Wie in der Aufgabenstellung bereits gesagt wird, kann die Spannung der Hülle vernachlässigt werden.

Der Luftdruck des Heliums innerhalb des Ballons muss in jeder Höhe größer sein als der Luftdruck der Außenumgebung. Begründet werden kann dies damit, dass die Spannung innerhalb des Ballons erhalten bleiben muss. Der Luftdruck drückt den Ballon nach außen, während der Luftdruck der Luft den Helium befüllten Ballon zusammendrücken will.

Damit die Kugelform des Ballons erhalten bleiben kann, muss also der nach außen drückende Druck größer sein als der nach innen drückende Druck. Dies muss für jede Höhe gelten. Da der Druck der Umgebung sich verändert und bei einem Wärmetausch auch der eigene Druck des Heliums Veränderungen erfahren, verformt sich eine dehnbare Hülle beim Aufsteigen

2)

Der Ballon hat im Gegensatz zu Aufgabe b nun die Eigenschaft, sich verformen zu können und Wärme austauschen zu können (wird nun angenommen). Dadurch ändern sich beim Aufstieg sowohl die Dichte, als auch der Druck und die Temperatur innerhalb des Ballons. Durch eine Veränderung des Ballonvolumens – der Ballon ist nun dehnbar – ändern sich auch die Auftriebskraft und die maximale Aufstiegshöhe.

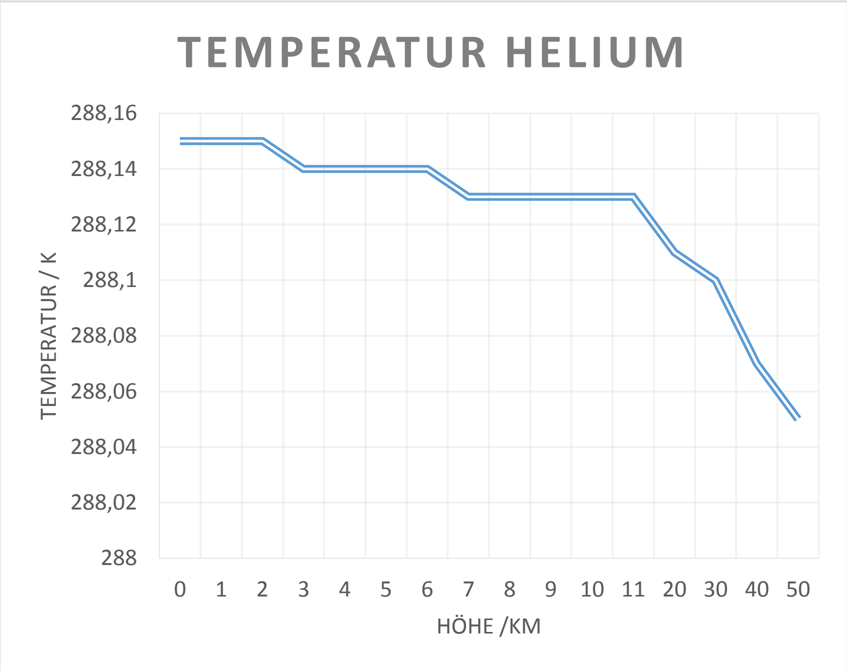
Zunächst wird damit begonnen, die Temperatur innerhalb des Ballons zu berechnen, die mithilfe der Formel

$$T_{He}(z) = T_{He}(0) - z * \frac{9{,}81\, m/s^2}{5240\, J/(kgK)}$$

berechnet werden kann.

$$T_{He}(1) = 288{,}15\, K - 1 * \frac{9{,}81 \frac{m}{s^2}}{5240 \frac{J}{kgK}} = 288{,}15\, K$$

Temperatur / K	Höhe / km
288,15	0
288,15	1
288,15	2
288,14	3
288,14	4
288,14	5
288,14	6
288,13	7
288,13	8
288,13	9
288,13	10
288,13	11
288,11	20
288,10	30
288,07	40
288,05	50



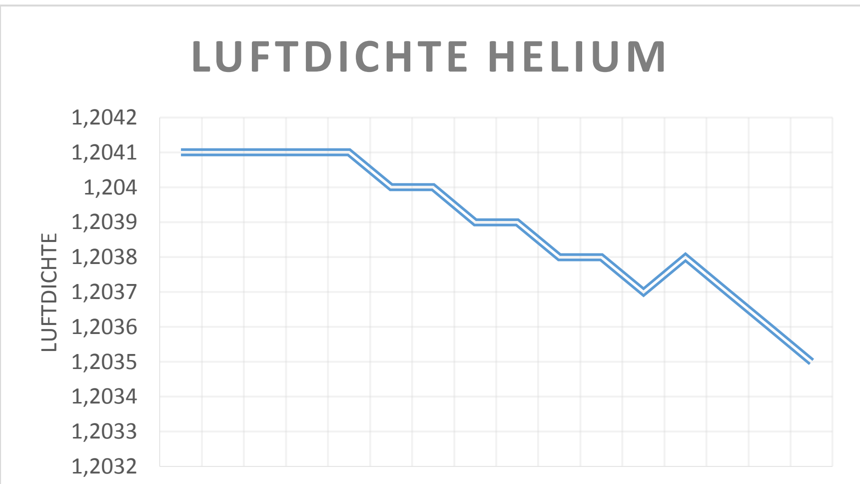
Im nächsten Schritt kann nun wie in Aufgabenteil a) die Luftdichte des Heliums innerhalb des Ballons bestimmt werden. Diese ändert sich mit Absenkung der Temperatur des Heliums.

Als Grundlage dient hier wieder die Formel

$$p(z) = p(z_u)\left(\frac{T_L(z)}{T_L(z_u)}\right)^{\frac{-g}{\gamma R_{He}}-1}$$

wobei R_{He} = 2078 J/kgK beträgt. Eine entsprechende Rechnung ergibt folgende Werte für die Luftdichte:

Luftdichte/ kg/m³	Höhe / km
1,2041	0
1,2041	1
1,2041	2
1,2041	3
1,2041	4
1,2040	5
1,2040	6
1,2039	7



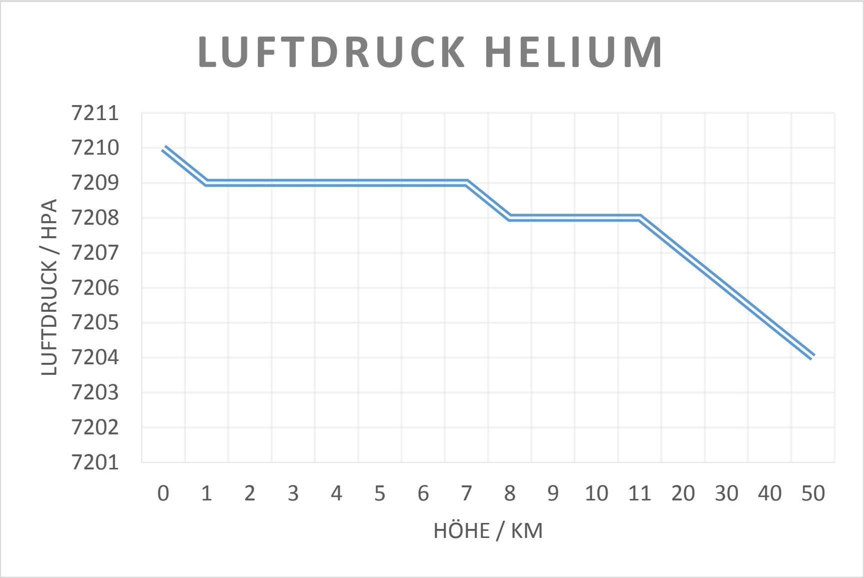
1,2039	8
1,2038	9
1,2038	10
1,2037	11
1,2038	20
1,2037	30
1,2036	40
1,2035	50

Auf dieser Grundlage wird nun der Luftdruck des Heliums mithilfe der idealen Gasgleichung

$$P\ (z) = p\ (z) * \ R_{He} * \ T_{He}(z)$$

berechnet.

Luftdruck/ hPa	Höhe / km
7210	0
7209	1
7209	2
7209	3
7209	4
7209	5
7209	6
7209	7
7208	8
7208	9
7208	10
7208	11
7207	20
7206	30
7205	40
7204	50



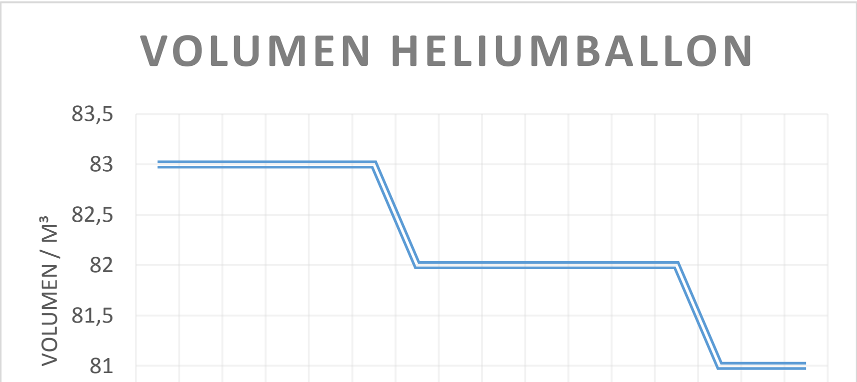
Da nun der Luftdruck des Heliumsballons zu jeder Höhe bekannt ist, kann das Volumen berechnet werden, welches Einfluss auf die Auftriebskraft ausübt. Zur Unterstützung wurde folgende bereits bekannte Formel angewendet:

$$P(z) * V = m * \ R_{He} * T$$

Umformung nach dem Volumen ergibt

$$V = \frac{m * \ R_{He} * T}{P\ (z)}$$

Volumen / m^3	Höhe / km
83	0
83	1
83	2
83	3
83	4



83	5
82	6
82	7
82	8
82	9
82	10
82	11
82	20
81	30
81	40
81	50

Wie erkannt werden kann, ist eine weitere sinnvolle Bearbeitung der Aufgabe nicht möglich. Es wird vermutet, dass die Bestimmung der Luftdichte des Heliums nicht richtig gemacht wurde und sämtliche Ergebnisse damit nicht richtig sind. Ein Fehler in den Berechnungen konnte nicht gefunden werden, ein Fehler in der Formel wurde diskutiert.

Das Ergebnis hätte sein müssen, dass die Aufstiegshöhe höher ist als bei Aufgabenteil b).

3)

Hier ist das gleiche Vorgehen wie bei b; 3 anzuwenden. Es muss ein Kräftegleichgewicht zwischen Auftriebskraft und Gewichtskraft vorherrschen, sodass der Ballon schwebt. Das Gleichgewicht kann wie in der Aufgabe b) formuliert werden, ein Ausrechnen wurde aufgrund der fehlerhaften Werte als nicht sinnvoll wahrgenommen.

4)

Mit den richtigen Ergebnissen wird man eine maximale Höhe herausfinden, bis wohin der Ballon steigen kann mit Gewicht. Unter Voraussetzung der Kenntnis dieser Angabe kann die Gleichung für das Volumen einer Kugel nach r umgestellt werden, sodass gilt

$$r^3 = \frac{3}{4} * \frac{V_{max}}{\pi}$$

Ziehen der 3. Wurzel ergibt

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} * \frac{V_{max}}{\pi}}$$

Wenn das Volumen bekannt ist, kann der Radius beziehungsweise durch Verdopplung der Durchmesser des Ballons auf der maximalen Höhe bestimmt werden.

5)

Ein Wetterballon weißt eine dehnbare Hülle auf, da er somit höher aufsteigen kann, ohne zu zerplatzen. Wenn der Ballon durch Verformung seine Fläche nicht erhöhen kann, dann nimmt die Kraft auf den Ballon zu. Dies führt zu einem viel schnelleren Platzen der Haut.

Ein Wetterballon könnte insofern seine Aufgabe nur unzufrieden stellend lösen, da er mit seinen Messinstrumenten nicht hoch genug aufsteigen kann.

Dieses Dokument wurde erstellt von der Gruppe „Die Astrophysiker“

Hannah-Arendt-Gymnasium

Tim Denecke, Sascha Gehrmann, Jan Heiming, Jonathan Kalter